185 001 J. 2508

CONCOURS SPÉCIAL T' 81

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Pour tout entier n positif, on note E_n l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. On appelle coefficient dominant d'un polynôme, le coefficient du monôme de plus haut degré de ce polynôme.

A

1. P et Q étant deux polynômes réels, on considère :

$$(P \mid Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} P(x)\, Q(x)\, dx.$$

Prouver que l'application $(P, Q) \longmapsto (P \mid Q)$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel des polynômes réels.

On note : $\| P \| = \sqrt{(P \mid P)}$ la norme associée à ce produit scalaire.

2. On se propose de démontrer, dans cette question, qu'il existe une suite unique (H_n) de polynômes vérifiant :

$H_0 = 1$.

Pour tout n entier, H_n est de degré n et son coefficient dominant est 1.

Deux polynômes H_i, H_j, d'indices distincts, sont orthogonaux, c'est-à-dire : $(H_i \mid H_j) = 0$.

a. Déterminer la forme nécessaire de H_1.

b. Les $(n + 1)$ premiers polynômes $H_0, H_1, \ldots, H_n$ étant supposés construits, prouver qu'ils forment une base de E_n.

Démontrer que H_{n+1} peut être alors déterminé en calculant les composantes de $H_{n+1} - X^{n+1}$ dans la base précédente.

c. En conclure que la suite (H_n) existe et est unique.

3.*a.* Démontrer que le polynôme H_n est orthogonal à tout polynôme de E_{n-1}.

b. Démontrer que, pour tout polynôme P de la forme $X^n + U$ où $U \in E_{n-1}$, on a : $\| H_n \| \leqslant \| P \|$.

4. On pose $S_0 = 1$ et, pour $n \geqslant 1$:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = S_n(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

a. Démontrer que S_n est un polynôme de degré n. Calculer son coefficient dominant.

b. Démontrer : $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ i \neq j,\ (S_i \mid S_j) = 0$.

En déduire H_n en fonction de S_n.

Tournez la page S. V. P.

c. Écrire une relation entre H_{n+1}, H_n et H'_n la dérivée de H_n.

En déduire : $H'_n = n\,H_{n-1}$.

d. Donner les expressions de H_2, H_3, H_4 et H_5.

Prouver que H_{2n} est une fonction paire et que H_{2n+1} est une fonction impaire.

e. Montrer que H_n vérifie une équation différentielle linéaire du 2e ordre. Calculer explicitement les coefficients de H_n.

On les exprimera sous forme condensée à l'aide de factorielles.

5. *a.* Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n a ses n zéros réels et distincts. On pourra démontrer que, dans le cas contraire, il existerait un polynôme Q de degré strictement inférieur à n tel que, pour tout x réel, $H_n(x)\,Q(x) \geqslant 0$ et cela permettra d'achever la démonstration.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer qu'entre deux zéros consécutifs quelconques de H_{n+1}, il existe un zéro et un seul de H_n.

6. Soit C (R) le disque de centre O et de rayon $R > 0$.

On pose :

$$F(t) = \int_{-t}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx$$

a. Prouver :

$$\iint_{C(R)} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \, dx\,dy \leqslant F^2(R) \leqslant \iint_{C(R\sqrt{2})} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \, dx\,dy$$

En déduire la valeur de

$$\| H_0 \|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx.$$

b. Calculer $\| H_n \|$ en fonction de n.

7. Soit $\Phi(x, t) = \exp\left(tx - \frac{t^2}{2}\right)$

a. Calculer : $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x, t)\, dt.$

b. Démontrer : $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \Phi(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{Q_n(x)}{n!}\, t^n$

où Q_n est un polynôme de degré n.

c. Prouver : $\forall n \in \mathbb{N}, Q_n = H_n$.

On pourra utiliser la dérivée de Φ par rapport à t ou bien calculer les coefficients de Q_n.

B

NOTA. — *Les deux questions de cette partie sont indépendantes entre elles.*

1. K étant une constante strictement positive, on dit que f, fonction numérique de deux variables réelles x et t, est solution de l'équation (E) sur le produit d'intervalles $I \times J$, si on a :

$$\forall\ (x, t) \in I \times J \quad K \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = 0 \qquad \text{(E)}$$

a. Donner les expressions des solutions de (E) qui sont de la forme : $f(x, t) = u(x)\, v(t)$.

On précisera les intervalles I, J.

b. Soit la fonction φ_n définie pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$ par :

$$\varphi_n(x, t) = (2t)^{\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2Kt}}\right)$$

Prouver que φ_n est une solution polynomiale de (E) sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$.

Montrer que φ_n se prolonge en une solution polynomiale P_n sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Donner l'expression de P_n à l'aide des coefficients de H_n.

c. Prouver que tout polynôme $U_n(x, t)$ de degré n, solution de (E), est déterminé uniquement par ses monômes en x.

En déduire que $(P_0, P_1, ..., P_n, ...)$ définis au paragraphe précédent engendrent l'espace vectoriel des solutions polynomiales de (E) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

d. Trouver une solution polynomiale ψ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ telle que :

$$\psi(x, 0) = \alpha x^4 + \beta x^2 .$$

et montrer qu'elle est unique.

2. Démontrer :

$$\forall\ (x, t) \in \mathbb{R}^2 \qquad (x - t) \sum_{k=0}^{n} \frac{H_k(x)\, H_k(t)}{k!} = \frac{H_{n+1}(x)\, H_n(t) - H_{n+1}(t)\, H_n(x)}{n!}$$

En déduire :

$$\forall\ x \in \mathbb{R} \qquad (n + 1) H_n^2(x) - n H_{n+1}(x) H_{n-1}(x) > 0.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail